Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
— Mise en évidence des résultats
— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème

(*Banque PT, Maths C 2011*)

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction continue à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique sur le papier millimétré joint)

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant n_0 + 1$:

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(c) Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{n\geqslant n_0} f(n)\right)$ et de l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie I

2. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln(\mathrm{e}) = 1$).

   Pour $t \geqslant \mathrm{e}$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$.

   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.
   (b) Étudier les variations de f sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur le papier millimétré joint.
   (d) Déterminer une primitive de f sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

   Que peut-on en déduire pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$?

   (e) Que peut-on déduire du (d) pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}\right)$?

3. Pour $t \geqslant \mathrm{e}$, on considère la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln(t))^2}$.

   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de g sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, donner la valeur de $g'(t)$.
   (b) Étudier les variations de g sur $[\mathrm{e}, +\infty[$
   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
   (d) L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
   (e) Que peut-on déduire du (d) pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2(\ln(n))^2}\right)$?

4. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2$$

   (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   On admet, dans ce qui suit, que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_n \geqslant 3$.
   (c) Montrer que, pour, tout entier $n \geqslant 3$: $u_n \geqslant \dfrac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2}$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
   (e) Montrer que, pour, tout entier $n \geqslant 1$: $\dfrac{u_n}{\ln(n)} + \dfrac{\ln(n)}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, et conclure sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

5. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
   (b) Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge (on pourra étudier ses variations).

   On notera ℓ sa limite.

   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

   Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$.

   Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\right)$?

   Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat du (b).

(d) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)=\ell-1$.

(e) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\gamma_n-\ell=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$.

(f) Soit ε un réel strictement positif.
Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geqslant n_0$:

$$\left|\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

(g) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

(h) Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(H_n-\ln(n)-\ell-\frac{1}{2n}\right)$.

Partie II

Soit h et β deux réels, avec $h>0$.

6. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t^h(\ln(t))^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
7. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que, pour $t \geqslant t_0$: $0<\dfrac{1}{t^h(\ln(t))^\beta}<1$.
8. On pose dans ce qui suit $\alpha=1+2$ h. Déduire de la question précédente que, pour $t \geqslant t_0$:

$$0<\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}<\frac{1}{t^{1+h}}.$$

9. L'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
10. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}\right)$?

Partie III

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $v_n=1-\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$.

11. La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
12. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$v_n=1-\frac{\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln(n)}},$$

13. Déterminer un réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\left|v_n-\dfrac{a}{n^2\ln(n)}\right| \leqslant \dfrac{b}{n^2(\ln(n))^2}$. où b est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

    Que peut-on en déduire pour la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}v_n\right)$?

Les séries de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ sont appelées Séries de Bertrand (la série harmonique $\left(\sum_{n=1} \frac{1}{n}\right)$ est un cas particulier) . Elles ont de nombreuses applications en mécanique statistique.

Corrigé

Corrigé du problème

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul et f une fonction à valeurs positives, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

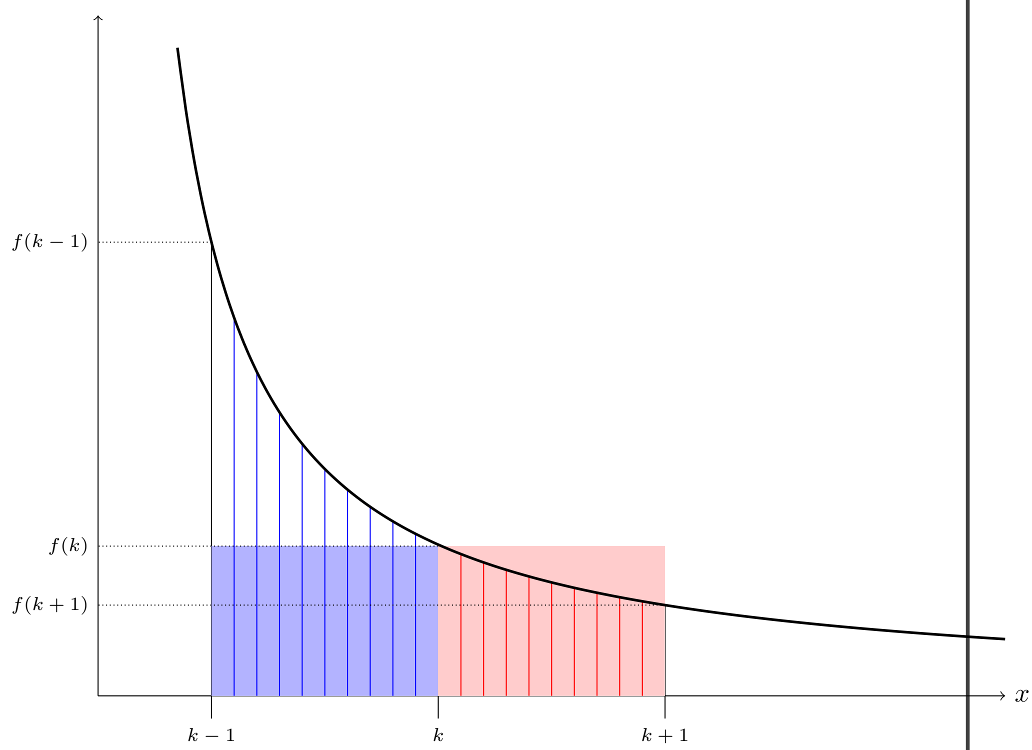
1. (a) Soit k entier naturel tel que $k \geqslant n_0 + 1$. f étant décroissante,

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k) \quad \text{et} \quad \forall t \in [k-1, k] \quad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$$

D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Figure .1 – Interprétation graphique



La première inégalité traduit le fait que l'aire hachurée en bleu sous la courbe de f entre $k-1$ et k est supérieure à l'aire du rectangle bleu de hauteur $f(k)$ et de largeur 1.

La seconde inégalité traduit le fait que l'aire hachurée en rouge sous la courbe de f entre k et $k+1$ est inférieure à l'aire du rectangle rouge de hauteur $f(k)$ et de largeur 1.

(b) Soit $n \geqslant n_0 + 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0+1, \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

(c) Rappelons des résultats du cours :

- La série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ est une série positive. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles définies par :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

est majorée et dans ce cas la somme de la série est : $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \sup_{n \geqslant n_0} S_n$.

- L'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ de la fonction positive f est convergente si et seulement si la fonction F définie par :

$$\forall x \geqslant n_0, \qquad F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée et dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$.

On va montrer que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

— Supposons que l'intégrale généralisée converge. Comme dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$, la deuxième inégalité du 1.(b) donne :

$$\forall n \geqslant n_0,\, S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) + f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0)$$

La série positive converge puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

— Supposons que la série converge. La première inégalité du 1.(b) donne alors pour tout $n \geqslant n_0 + 1$: $\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$. D'où, pour $n \geqslant n_0 + 1$,

$$\begin{aligned} F(n+1) &= \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \end{aligned}$$

Soit$x \geqslant n_0$, et $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, on ainsi $x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$. Alors , comme f est positive, F est positive, d'où

$$\forall x \geqslant n_0, \qquad F(x) \leqslant F(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Ainsi comme F est majorée, l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a bien montré que $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ converge si et seulement si l'intégrale généralisée } \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$

En cas de convergence, en passant à la limite pour $n \to +\infty$ dans l' inégalité du 1.(b)

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Partie I

2. (a) La fonction f définie sur $[e,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[e,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $[e,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a alors

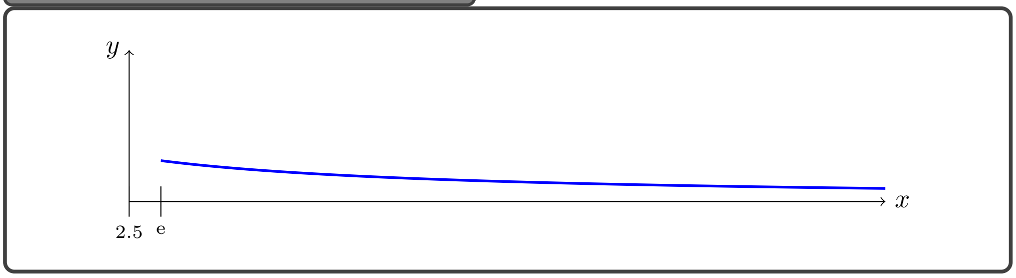
$$\boxed{\forall x \geqslant e,\ f'(x) = -\frac{1}{t^2(\ln(t))^3}(\ln(t)+2)}$$

(b) On obtient le tableau de variations suivant

x	e	$+\infty$
f'	$-$	
f	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ↘	0

(c) La courbe de f sur $[\mathrm{e},+\infty[$ a l'allure suivante :

Figure .2 – Interprétation graphique



(d) Une primitive sur $[e,+\infty[$ de f, continue sur cet intervalle est F définie par :

$$\boxed{\forall x \geqslant \mathrm{e}, \qquad F(x) = -\frac{1}{\ln(t)}}$$

Donc, pour $x \geqslant \mathrm{e}$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_{\mathrm{e}}^{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

$$\boxed{\text{L'intégrale impropre } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge donc et } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = 1.}$$

(e) D'après le préliminaire, puisque f est continue et décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2} \text{ converge.}}$

3. (a) La fonction g définie sur $[\mathrm{e},+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{t^2(\ln(t))^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\mathrm{e},+\infty[$, en tant que quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\mathrm{e},+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a alors

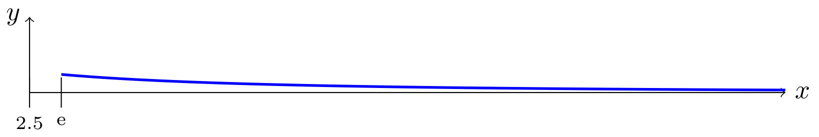
$$\boxed{\forall x \geqslant e,\ g'(x) = -2\frac{\ln(t)+1}{t^3(\ln(t))^3}}$$

(b) On en déduit le tableau de variations suivant

x	e	$+\infty$
g'	$-$	
g	$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ↘	0

(c) La courbe de g sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ a l'allure suivante :

Figure .3 – Interprétation graphique



(d) Pour $t \geqslant \mathrm{e}$ on a $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ Or l'intégrale de Riemman $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, par théorème de majoration pour les intégrales impropres de fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge aussi.}}$

(e) D'après le préliminaire, puisque g est continue et décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} g(n) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2(\ln(n))^2} \text{ converge.}}$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

(a) On a

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad I_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2)}$$

(b) En dérivant on obtient

$$\forall t \in [e, +\infty[,\ h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \leqslant 0$$

Ainsi la fonction h définie sur $[e, +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{\ln t}{}\mathrm{d}t$ est décroissante sur $[e, +\infty[$

Étudions les variations de la suite (u_n) :

Soit $n \geqslant 3$, alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t \qquad \textit{par croissance de } h \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$

(c) Soit $n \geqslant 3$, on a

$$u_n = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Or $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2)$

D'où

$$\forall n \geqslant 3, \qquad u_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)}_{\geqslant 0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \qquad u_n \geqslant \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}}$$

(d) $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée : elle converge donc.}}$

(e) Pour $n \geqslant 2$ on a $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ D'où

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{u_n}{\ln n} = \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\frac{\ln p}{\ln n}}_{\leqslant 1} \frac{1}{p} - \frac{\ln n}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$$

Comme la suite (u_n) converge, le premier membre de l'inégalité tend vers $+\infty$ pour n tendant vers l'infini. Ainsi :

$$\boxed{H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$\boxed{\text{La série harmonique de terme général } \dfrac{1}{n} \text{ diverge.}}$

5. (a) On applique le résultat du préliminaire à la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}$ et en prenant $n_0 = 1$ on obtient

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant H_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant \ln(n+1) + \underbrace{(1 - \ln(2))}_{\geqslant 0} \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

On vérifie que la formule est vraie pour $n = 1$.

(b) Posons, pour $n \geqslant 1$, $\gamma_n = H_n - \ln n$. Alors

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \gamma_n \leqslant 1$$

La suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, d'après le 5.(a). Étudions les variations de cette suite.

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

Soit φ définie par :

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x+1} - (\ln(x+1) - \ln(x))$$

φ est dérivable et

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} \geqslant 0$$

Ainsi φ est croissante sur $]0, +\infty[$. Or $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$.

on en déduit que, pour $n \geqslant 1$, $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \varphi(n) \leqslant 0$.

La suite (γ_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. Comme la suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, sa limite, notée ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

(c) Effectuons un développement asymptotique de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$$

Par comparaison par équivalence des séries de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ converge. Alors :

$$\sum_{p=1}^{n-1} (\gamma_{p+1} - \gamma_p) = \gamma_n - \gamma_1 = \gamma_n - 1 \underset{n}{\longrightarrow} +\infty \sum_{p=1}^{+\infty} (\gamma_{p+1} - \gamma_p)$$

D'où $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} (\gamma_{p+1} - \gamma_p) + 1 = \ell$

On retrouve le résultat du (b) : la suite de terme général $\gamma_n = H_n - \ln n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$ est convergente.

(d) Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{p} - \ln\frac{p}{p-1}\right) = \sum_{p=2}^{n} (H_p - H_{p-1} - (\ln p - \ln(p-1))) = \sum_{p=2}^{n} (\gamma_p - \gamma_{p-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 1$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}\right) = \ell - 1}$$

(e) Pour $n \geqslant 1$ on a $\gamma_n = \gamma_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} (\gamma_k - \gamma_{k-1})$. Donc, d'après le (d), pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\gamma_n - \ell &= 1 + \sum_{k=2}^{n} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) - \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right) + 1\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right) - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \gamma_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}$$

(f) Effectuons un développement asymptotique

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{k\to+\infty}{=} -\left(-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\left(1+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\
&\underset{k\to+\infty}{=} -\frac{1}{6k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\\
&\underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2\times\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)=0$, d'où

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*\ \forall k\geqslant n_0,\qquad \left|\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{k^2}}$$

(g) Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la série de terme général $\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}$ converge absolument par majoration et donc, pour tout $n\geqslant n_0$

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}$$

(h) En appliquant la deuxième inégalité du préliminaire à la fonctio n$t\mapsto\frac{1}{t}$, entre n et N on obtient $\sum\limits_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{n^2}-\frac{1}{N^2}$, d'où en faisant tendre N vers $+\infty$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{n^2}$.
Ainsi

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*\ \forall n\geqslant n_0,\qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}}$$

Comme $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2n}$ Alors, pour $n\geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
\left|H_n-\ell-\ln n-\frac{1}{2n}\right| &= \left|\gamma_n-l-\frac{1}{2n}\right|\\
&=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\\
&\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{H_n-\ell-\ln(n)-\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

On a plus précisément

$$\boxed{H_n=\ln(n)+\ell+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Partie II

6. Par croissances comparées, on a

$$\boxed{\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}\underset{t+\infty}{\longrightarrow}0}$$

7. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ est positive sur $]1,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta} = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi il existe } t_0 > 0, \text{ tel que, pour tout } t \geqslant t_0 : 0 < \frac{1}{t^h(\ln t)^\beta} < 1.}$$

8. Posons $\alpha = 1+2h$. Comme $\dfrac{t^{1+h}}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$, la question précédente montre que :

$$\boxed{\forall t \geqslant t_0, \qquad 0 < \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}}$$

9. Montrons la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$, avec $t_0 > 0$ et $\alpha > 1$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue sur $[t_0,+\infty[$. De plus l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{1+h>1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{La question précédente montre, par théorème de majoration pour les intégrales impropres des fonctions positives que, quel que soit } \alpha > 1, \text{ l'intégrale impropre } \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

10. Soit $\alpha > 1$. La fonction f de la question précédente vérifie sur $[2,+\infty[$ les hypothèses du préliminaire ; en particulier, f est décroissante car c'est l'inverse d'une fonction positive croissante.

$$\boxed{\text{Donc, comme l'intégrale généralisée } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \text{ converge, il en est de même de la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}.}$$

Partie III

11. Pour $p > 0$, on a

$$\frac{\ln(n+p)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n} \underset{n}{\longrightarrow} +\infty 1$$

Ainsi $\ln(n+p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

D'où $\dfrac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{\ln n \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi :

$$\boxed{v_n = 1 - \frac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Comme $\ln(n+p) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{p}{n}\right) = \ln n \left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n}\right)$, on peut écrire :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}}$$

12. On fait un développement asymptotique au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned}
v_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\left[1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^2}{1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left[1 + \frac{2}{\ln n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{n^2(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{\ln n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2(\ln n)^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\underset{n \quad to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2 \ln n} - \frac{1}{n^2 \ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)^2}\right)$$

Il existe donc k réel tels que : $\boxed{v_n = -\frac{1}{n^2 \ln n} + \frac{k}{n^2 (\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2 (\ln n)^2}\right)}$.

Donc $\left|v_n + \frac{1}{n^2 \ln n}\right| \times \left|n^2 (\ln n)^2\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} k$ et donc est bornée

Il existe donc $a = -1$ et b réel tel que, lorsque n tend vers l'infini :

$$\boxed{\left|v_n - \frac{a}{n^2 \ln n}\right| \leqslant \frac{b}{n^2 (\ln n)^2}}$$

Or :

$$|v_n| = \left|\left((v_n - \frac{a}{n^2 \ln n}\right) + \frac{a}{n^2 \ln n}\right| \leqslant \left|v_n - \frac{b}{n^2 (\ln n)^2}\right| + \frac{|a|}{n^2 \ln n} \leqslant \frac{b}{n^2 (\ln n)^2} + \frac{|a|}{n^2 \ln n}$$

La série de terme général $\frac{b}{n^2 (\ln n)^2} + \frac{|a|}{n^2 \ln n}$ converge comme somme de deux séries convergentes, d'après la deuxième partie.

$\boxed{\text{Par comparaison par inégalité des séries positives, on en déduit que la série de terme général } v_n \text{ converge absolument.}}$